DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Intermédiaire
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Igor KORTCHEMSKI
STAGE : Montpellier 2014

Polynômes

1 Opérations sur les polynômes

On commence par définir la notion de polynôme et voir quelques propriétés.

Définition 1. Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée polynôme à coefficient réels (abrégé en polynôme dans ce qui suit) s'il existe des nombres réels $a_0, \dots, a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

On verra plus tard (Corollaire 8) qu'un polynôme à coefficients réels s'écrit de manière unique sous cette forme. Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P, noté $\deg P$, vaut n. Dans ce cas, a_n est appelé le coefficient dominant de P. On décrète que le degré du polynôme nul est $-\infty$. Si le coefficient dominant de P vaut 1, on dit que ce polynôme est unitaire. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. De même, on note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels et $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

Dans ce qui suit, nous ne ferons pas de distinction entre polynôme et fonction polynomiale associée. Il faudrait la faire en toute rigueur, mais plutôt que de rendre l'exposition abstraite, nous préférons insister sur les idées sous-jacentes. Voir l'appendice situé à la fin du cours pour plus de détails.

On notera indifféremment $P(x)$ ou $P(X)$ ou encore P.

Exemple 2. La fonction $P(x) = \sqrt{2} - 2x + \pi x^2$ est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant π. La fonction $Q(x) = |x|$ n'est pas un polynôme (pourquoi ?).

Remarque 3. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ainsi, les polynômes de degré zéro sont exactement les fonctions constantes non nulles.

Proposition 4. Soient P, Q deux polynômes. Alors $P+Q$ et $P \times Q$ sont également deux polynômes.

Démonstration. Pour $P+Q$ il suffit d'utiliser le fait que $\alpha x^i + \beta x^i = (\alpha+\beta)x^i$ pour un nombre réel x, et pour $P(x) \times Q(x)$, il suffit de développer le produit. $\square$

Exemple 5. Pour tout réel a et tout entier positif n, $P(x) = (x-a)^n$ est un polynôme de degré n.

Proposition 6. Soient P, Q deux polynômes. Alors $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ et $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ (avec la convention $-\infty + \alpha = -\infty$ pour que cet énoncé soit valable si l'un des deux polynômes est nul).

Démonstration. On vérifie aisément que $\deg(P+Q) = \deg P$ si $\deg P > \deg Q$, que $\deg(P+Q) = \deg Q$ si $\deg Q > \deg P$ et que si $\deg P = \deg Q$, alors $\deg(P+Q) \leqslant \deg P$. Il peut cependant ne pas y avoir égalité (prendre par exemple $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -x^2$).

La deuxième partie de la proposition découle du fait que si a_n est le coefficient dominant de P et b_m est le coefficient dominant de Q, alors $a_n b_m$ est le coefficient dominant de PQ. $\square$

Le résultat crucial suivant permet de montrer l'unicité de l'écriture d'un polynôme :

Théorème 7. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme à coefficients réels tel que $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, est supposons que $P(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_n x^n$ avec $k \geqslant 0$ et $a_k \neq 0$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $P(x) = 0$, en divisant par x^k on en déduit que $a_k + x a_{k+1} + \cdots + a_n x^{n-k} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En faisant tendre x vers 0, on en déduit que $a_k = 0$, ce qui est absurde. $\square$

Corollaire 8. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des nombres réels tels que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. On suppose que pour tout nombre réel x :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Alors $m = n$ et $a_i = b_i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$.

Démonstration. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n - (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$, qui est un polynôme à coefficients réels tel que $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le résultat découle alors du théorème précédent. $\square$

2 Division euclidienne et racines

Dans cette partie, notre but est d'expliquer en quoi la connaissance des racines d'un polynôme P, c'est-à-dire des éléments x tels que $P(x) = 0$, donne des informations sur P. On commence par montrer qu'il existe une notion de division euclidienne de polynômes très similaire à celle des entiers.

2.1 Division euclidienne de polynômes

Ici, et dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème 9. Soient $P, U \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg U \geqslant 1$. Alors il existe un unique couple de polynômes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P = QU + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) \leqslant \deg(U) - 1.$$

Démonstration. Pour l'existence, on applique l'algorithme vu en cours en abaissant à chaque étape le degré de P. Plus précisément, on pose $P_0 = P$ et $Q_0 = 0$. On commence à l'étape 0 et voici ce qu'on fait à l'étape k : notons d_k degré de P_k et c_k son coefficient dominant. Notons également n le degré de U et u_n son coefficient dominant. Si $\deg(P_k) \leqslant \deg(U) - 1$, on arrête l'algorithme en prenant $Q = Q_k$ et $R = P_k$. Sinon, on pose :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{c_k}{u_n} X^{d_k - n} U \qquad \text{et} \qquad Q_{k+1} = Q_k + \frac{c_k}{u_n} X^{d_k - n}.$$

On passe ensuite à l'étape $k+1$. L'algorithme se termine bien car le degré de P_k est au plus $\deg P - k$, et les polynômes Q et R donnés par l'algorithme vérifient les conditions requises.

Pour l'unicité, supposons par l'absurde qu'il existe deux tels couples Q, R et Q', R'. Alors $QU + R = Q'U + R'$. En particulier, $Q \neq Q'$, car sinon on a aussi $R = R'$. Cela implique également :

$$U(Q - Q') = R' - R.$$

Or, d'après la proposition 6, le degré du terme de gauche et supérieur ou égal à celui de U et celui de droite est inférieur ou égal à $\deg(U) - 1$, ce qui est contradictoire et conclut la démonstration. $\square$

Exemple 10. La division euclidienne de X^5-3X^3+2X+1 par X^3+3X^2-2X-1 est :

$$X^5-3X^3+2X+1=(X^2-3X+8)(X^3+3X^2-2X-1)+\left(-29X^2+15X+9\right).$$

Remarque 11. La division euclidienne telle quelle est fausse pour des polynômes à coefficients entiers. Par exemple, il n'existe pas de $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $3x^2+1 = Q(x)(2x+1)$ (comparer les coefficients dominants). En revanche, en reproduisant la démonstration précédente, si $P, U \in \mathbb{Z}[X]$ **et que le coefficient dominant de U est** 1, alors si $\deg U \geqslant 1$, il existe il existe un unique couple de polynômes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P = QU + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) \leqslant \deg(U) - 1.$$

En effet, dans la preuve précédente, il a fallu diviser par « u_n ». Or, lorsqu'on divise par des éléments de $\mathbb{Z}$, on ne reste pas dans $\mathbb{Z}$. Ceci explique un peu d'ailleurs pourquoi la théorie des polynômes à plusieurs variables est plus compliquée que celle des polynômes à une variable. En effet, on peut par exemple voir les polynômes réels à deux variables comme les polynômes en y à coefficients dans $\mathbb{R}[X]$. Mais, de même que dans $\mathbb{Z}$, tous les éléments de $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas inversibles.

Définition 12. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec P non nul. On dit que P divise Q s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$.

Ainsi, P divise Q si le reste de la division euclidienne de Q par P vaut 0.

Exemple 13. Trouvons le reste de la division euclidienne de $A(x) = x^{2013}+2013$ par $B(x) = x-1$. Par division euclidienne, on écrit $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$ avec $R(x)$ un polynôme de degré au plus 0. Ainsi R est un polynôme constant qu'on notera c. Autrement dit, $A(x) = Q(x)B(x) + c$ et il nous reste à trouver la valeur de c. Prenons $x = 1$: $A(1) = Q(1)B(1) + c$. Or $B(1) = 1$. On en déduit que $c = A(1) = 2014$.

Exercice 1 Trouver le reste de la division euclidienne de $x^{100} - 2x^{51} + 1$ par $x^2 - 1$.

2.2 Racines et factorisation de polynômes

Nous voyons ici que la connaissance des racines d'un polynôme permet de le factoriser. Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Définition 14. Un élément $x \in \mathbb{K}$ est appelé *racine* d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(x) = 0$.

Exemple 15. Le polynôme réel $X^2 - 1$ a deux racines réelles, qui sont 1 et -1. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. Le polynôme réel $X^2 - 2$ a deux racines réelles, mais le polynôme à coefficients rationnels $X^2 - 2$ n'a pas de racines rationnelles car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Si $a \in \mathbb{K}$, le polynôme $(X-1)^{2012}$ est de degré 2012 mais n'a qu'une seule racine qui est 1.

Le théorème suivant est très important et doit être connu.

Théorème 16. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est racine de P, autrement dit $P(a) = 0$.
2. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(x) = Q(x)(x - a).$$

Démonstration. Il est clair que le deuxième point implique le premier. Quant à la réciproque, le point clé est d'utiliser la division euclidienne. En effet, supposons que $P(a) = 0$. Écrivons alors la division euclidienne de P par $X - a$ sous la forme $P(x) = Q(x)(x-a) + R(x)$ avec R un polynôme de degré au plus $1 - 1 = 0$. Ainsi, R est un nombre réel, noté c. Bref, $P(x) = Q(x)(x - a) + c$. Évaluons cette quantité en $x = a$: $0 = P(a) = Q(a)(a - a) + c$. Donc $c = 0$, ce qu'on voulait démontrer. □

Théorème 17. Soit $n \geqslant 0$ un entier. Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n a au plus n racines différentes dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est vrai car par définition un polynôme de degré 0 est une constante non nulle. Soit $n \geqslant 1$ et supposons le résultat acquis pour tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ degré $n - 1$. Soit alors $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Si P n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $a \in K$ une racine de P. D'après le théorème précédent, on peut écrire $P(X) = (X-a)R(X)$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n-1$, qui par hypothèse de récurrence a au plus $n - 1$ racines différentes. On en déduit que P a au plus n racines différentes. □

Remarque 18. Il existe des polynômes qui n'ont pas de racines réelles, par exemple $P(x) = x^4 + 1$. En revanche, un polynôme P à coefficients réels et de degré impair a au moins une racine réelle. En effet, soit c son coeffictient dominant. Alors $P(x) \to +\infty$ quand $x \to \infty$ et $P(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$ lorsque $c > 0$ et $P(x) \to -\infty$ quand $x \to \infty$ et $P(x) \to +\infty$ quand $x \to -\infty$ lorsque $c < 0$. Le polynôme P doit donc forcément couper quelque part l'axe des abcsisses (en termes rigoureux, c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue P).

Ce théorème important implique quelques corollaires donnant une information concernant le polynôme sachant quelque chose sur ses racines.

Corollaire 19. Soit $n \geqslant 0$ un entier. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n+1$ racines. Alors P est le polynôme nul. En particulier, un polynôme ayant une infinité de racines est forcément le polynôme nul.

Démonstration. Il suffit de dire que si P n'est pas le polynôme nul, alors d'après le théorème précédent il a au plus $\deg(P) \leqslant n$ racines. □

Corollaire 20. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n. On suppose qu'il a n racines différentes $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P(x) = a_n (x - r_1) \cdots (x - r_n).$$

Démonstration. Soit $Q(X) = P(x) - a_n (x - r_1) \cdots (x - r_n) \in \mathbb{K}[X]$. Ce polynôme admet au moins n racines différentes $(r_1, \ldots, r_n)$, et on voit qu'il est de degré au plus $n-1$ (le terme $a_n x^n$ se simplifie dans la soustraction). D'après le corollaire précédent, Q est le polynôme nul. □

Corollaire 21. Un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines est nul. Ainsi, un polynôme ayant une infinité de racines est forcément le polynôme nul.

Exercice 1 En utilisant le corollaire précédent, retrouver le fait que $Q(x) = |x|$ n'est pas un polynôme.

Exemple 22. Soit P un polynôme de degré 2013 vérifiant $P(k) = k$ pour $k = 1, 2, \ldots, 2013$ et $P(0) = 1$. Trouvons $P(-1)$.

Le polynôme $P(x) - x$ est de degré 2013 et admet 2013 racines qui sont $k = 1, 2, \ldots, 2013$. On a donc forcément

$$P(x) - x = c \cdot (x-1)(x-2)\cdots(x-2013)$$

avec c un nombre réel. En évaluant en $x = 0$, il vient $1 = P(0) = -c \cdot 2013!$, de sorte que $c = -1/2013!$. D'où

$$P(-1) = -1 + \frac{2014!}{2013!} = 2013.$$

Pour conclure cette partie, prouvons la propriété utile suivante en identifiant les coefficients.

Proposition 23. Soit P un polynôme tel que $P(x)^2$ soit un polynôme en x^2 (c'est-à-dire qu'il existe un polynôme R tel que $P(x)^2 = R(x^2)$. Alors il en est de même de $P(x)$ ou de $P(x)/x$ (c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que soit $P(x) = Q(x^2)$, soit $P(x) = xQ(x^2)$).

Démonstration. Écrivons $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Comme $P(x)^2 = R(x^2)$, le coefficient devant x^{2n-1} dans $P(x)^2$, à savoir $2a_n a_{n-1}$, est nul. On en déduit que $a_{n-1} = 0$. De même, le coefficient devant x^{2n-3} dans $P(x)^2$, à savoir $2a_n a_{n-3}$, est nul. On en déduit que $a_{n-3} = 0$. De même, on obtient que $a_{n-2k-1} = 0$ pour $n - 2k - 1 \geqslant 0$. Le résultat en découle. □

Pour illustrer cette propriété, on pourra chercher l'exercice suivant.

Exercice 2 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $16P(x^2) = P(2x)^2$.

2.3 Racines multiples et polynôme dérivé

Doit-on dire que le polynôme $P(x) = (x-1)^n$ a une seule racine, ou bien n racines qui sont les mêmes ? Pour ne pas faire de confusion, nous traitons le cas des racines multiples.

Définition 24. Soient $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}$ et un entier $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est racine de multiplicité m de P s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Il se trouve qu'on dispose d'un critère assez pratique permettant de reconnaître une racine multiple.

Définition 25. Soit $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé P' par $P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$.

La proposition suivante, réminiscente des propriétés de l'opérateur de dérivation sur les fonctions réelles dérivables, est fondamentale. On laisse sa démonstration au lecteur.

Proposition 26. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$(PQ)' = PQ' + P'Q.$$

Proposition 27. Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \geqslant 1$ un entier. Soit $P(x) = (x-a)^n$. La dérivée de P est $P'(x) = n(x-a)^{n-1}$.

Démonstration. Prouvons cela par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le polynôme dérivé de $x - a$ est bien 1. Supposons le résultat acquis au rang n, montrons-le au rang $n+1$. Soit $Q(x) = (x-a)^{n+1}$. En écrivant $(x-a)^{n+1} = (x-a)(x-a)^n$, on obtient

$$Q'(x) = (x-a)^n + (x-a)\left((x-a)^n\right)'.$$

Donc par hypothèse de récurrence, $Q'(x) = (x-a)^n + (x-a) \cdot (n-1)(x-a)^n = n(x-a)^n$. Ceci conclut la récurrence et la preuve de la proposition. □

Théorème 28. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Alors α est une racine multiple de P si, et seulement si, $P'(\alpha) = 0$.

Démonstration. Dans le sens direct, écrivons $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$ avec $m \geqslant 2$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. En dérivant cette expression, il vient $P'(x) = m(x-\alpha)^{m-1}Q(x) + (x-\alpha)^m Q'(x)$. En prenant $x = \alpha$, on conclut que $P'(\alpha) = 0$.

Pour la réciproque, supposons que $P'(\alpha) = 0$ et raisonnons par l'absurde en supposant que α soit une racine non multiple de P. Alors P s'écrit $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ (si $Q(\alpha) = 0$, d'après le théorème 16, on pourrait écrire $P(x) = (x-\alpha)^2 R(X)$). En dérivant cette expression, il vient $P'(x) = Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$. En prenant $x = \alpha$, il vient $P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0$, ce qui est absurde. □

Exemple 29. Soit $n \geqslant 1$ un entier et montrons que $(X+1)^2$ divise $P(X) = X^{4n+2} + 2X^{2n+1} + 1$. D'après le théorème 16, il suffit que -1 est racine double de P. Ceci découle aisément du fait que $P(-1) = 0$ et $P'(-1) = 0$.

Remarque 30. Si $P'(\alpha) = 0$, cela n'implique pas que α soit racine multiple (ou racine tout court !) de P. Il faut en effet s'assurer que $P(\alpha) = 0$ pour utiliser le corollaire précédent. Par exemple, si $P(x) = x^2 - 2$, on a $P'(x) = 2x$, mais 0, bien que racine de P', n'est pas racine de P.

Remarque 31. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Pour un entier $k \geqslant 1$, notons $P^{(k)}$ le polynôme P dérivé k fois. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur n l'équivalence

$$P(a) = 0, P'(a) = 0, \ldots, P^{(n)}(a) = 0 \iff (x-a)^n \text{ divise } P.$$

2.4 Exercices d'application

Exercice 1 Trouver les réels a, b tels que $(x-1)^2$ divise $ax^4 + bx^3 + 1$.

Exercice 2 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tous réels x, $P(2x) = P'(x)P''(x)$.

Exercice 3 Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[X]$ qui possède n racines réelles différentes. Montrer que pour tout x réel, $P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2$. En déduire que pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 4 (Oral ENS 2009) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que $(n-1)\left(P'(x)\right)^2 \geqslant nP(x)P''(x)$ et déterminer les cas d'égalité.

2.5 Interpolation

Étant donnés un nombre fini de points du plan, existe-t-il un polynôme tel que que sa courbe représentative passe par ces points ? Trouver un tel polynôme, c'est résoudre un problème d'interpolation.

Théorème 32. Soient $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels (avec les a_i deux à deux distincts). Alors il existe un unique polynôme P de degré $n-1$ tel que pour tout i, $P(a_i) = b_i$.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité en considérant P, Q deux polynômes vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème. Alors le polynôme $P - Q$ est de degré au plus $n-1$, qui admet au moins n racines différentes, à savoir $a_1, \dots, a_n$. Il est donc nécessairement nul.

Quant à l'existence, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, introduisons les polynômes suivants, appelés polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

L'intérêt est que pour tout j différent de i, $L_i(a_j) = 0$, alors que $L_i(a_i) = 1$. On en déduit aisément que le polynôme :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(x)$$

convient. □

Ainsi, un polynôme de degré n est complètement déterminé par les images de $n+1$ points distincts.

Exercice 1 Soient $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ (avec les a_i deux à deux distincts). Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(a_i) = b_i$.

Exercice 2 Trouver tous les polynômes à coefficients complexes P tels que pour tout rationnel q, $P(q)$ est rationnel.

Exercice 3 On définit les polynômes de Hermite comme suit : $H_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $H_n(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$.

1. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.
2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(k) \in \mathbb{Z}$.
3. (i) Calculer, pour des entiers $j \leqslant k$ la somme :

$$\sum_{i=j}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}.$$

Indication. On pourra écrire $X^k = (X+1-1)^k$.

(ii) Soit (u_j) une suite de nombres réels. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
1. Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $u_j = P(j)$.
2. Il existe un entier positif n tel que pour tout entier $i \geqslant n+1$, on a $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}u_j = 0$.

2.6 Cas des polynômes à petit degré

Nous maintenant quelques applications des résultats précédents, parfois sous la forme d'exercice corrigé.

Proposition 33. Soient b, c deux nombres réels. On souhaite connaître le nombre de réels x tels que $x^2 + bc + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4c$, appelé le discriminant. Alors :

1. Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
2. Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution qui est $-\frac{b}{2}$.
3. Si $\Delta > 0$, il y a exactement deux solutions, qui sont :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}.$$

Démonstration. L'idée est de se ramener au cas $b = 0$ en écrivant $x^2 + bx + c$ sous la forme suivante, dite forme canonique :

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

L'intérêt réside dans le fait que x n'intervient qu'une fois dans la nouvelle expression. Cette forme rend très souvent de précieux services et est à retenir. Ainsi, $x^2 + bx + c = 0$ si, et seulement si, $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$. Ainsi, un carré étant positif, si $\frac{b^2}{4} - c = \Delta/4 < 0$, il n'y a pas de solution, d'où le premier point. D'un autre côté, si $\Delta \geqslant 0$, alors $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$ si, et seulement si :

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

On en déduit les points 2. et 3. □

Exemple 34. Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ a un discriminant égal à -3, et n'a donc pas de racine réelle.

Exercice 1 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, et considérons le graphe de la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$. Montrer qu'en faisant une homothétie et une translation, on peut obtenir le graphe de la fonction $Q(x) = x^2$.

Remarque 35. Il s'ensuit qu'étant donné un polynôme de degré 2, on peut aisément dire s'il a des racines réelles, et le cas échéant donner leur expression. Ceci est tout à fait remarquable : on peut montrer qu'il existe des polynômes de degré 5 dont les racines réelles ne s'expriment pas en utilisant des racines carrées, cubiques, etc. Cependant, si $P(x)$ est un polynôme de degré 3 et si on trouve une racine évidente a (par exemple $a = 1, 2, -1, -2, ...$), alors on peut effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. On en déduit qu'il existe Q, un polynôme de degré 2, tel que $P(x) = Q(x)(x - a)$. Mais Q est de degré 2, et ce qui précède s'applique. La moralité de ceci est que si on trouve une racine évidente d'un polynôme de degré 3, alors on arrivera à connaître toutes ses racines. À titre d'illustration, on pourra chercher l'exercice suivant.

Exercice 2 Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant :

$$\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)zx = 4 \\ (z+1)xy = 4. \end{cases}$$

3 Polynômes symétriques élémentaires

Dans cette partie, nous nous intéressons aux liens unissant les coefficients d'un polynôme à ses racines.

3.1 Relations de Viète

Proposition 36 (Relations de Viète)**.** Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme réel de degré 2 (avec $a \neq 0$) ayant z_1 et z_2 comme racines réelles. Alors $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$.

Démonstration. D'après le corollaire 20, on a $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$. En développant le terme de droite et en identifiant les coefficients, on trouve les égalités annoncées. □

Ces relations sont utiles car elles expriment les coefficients du polynôme en fonction des racines. À ce titre, on cherchera l'exercice suivant.
Exercice 1 Trouvez toutes les valeurs du paramètre a pour que l'équation

$$ax^2 - (a+3)x + 2 = 0$$

admette deux racines réelles de signes opposés.

Définition 37. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la k-ième fonction symétrique élémentaire est par définition

$$\sigma_k(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} z_{i_1} \cdots z_{i_k},$$

Lorsque les éléments $z_1, \dots, z_n$ sont sous-entendus, pour simplifier on notera parfois σ_k au lieu de $\sigma_k(z_1, \dots, z_n)$.

Ainsi, par exemple, pour $n = 3$, on a $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3$, $\sigma_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ et $\sigma_3 = z_1 z_2 z_3$.

Proposition 38 (Relations de Viète dans le cas général)**.** Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$. On suppose que P adment n racines $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}$ comptées avec multiplicité (c'est-à-dire que si z est racine d'ordre k, z apparaît k fois dans la liste $z_1, \dots, z_n$). Alors, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sigma_k(z_1, \dots, z_k) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j = -\frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, \prod_{i=1}^{n} z_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Démonstration. D'après le Corollaire 20, on a $P(x) = a_n(x-z_1)\cdots(x-z_n)$. Or, dans le développement de $a_n(x-z_1)\cdots(x-z_n)$, on voit aisément que le coefficient devant x^{n-k} vaut $(-1)^k a_n \sigma_k(z_1,\ldots,z_k)$. Or ce coefficient vaut aussi a_{n-k}. Le résultat en découle. □

Exemple 39. Cherchons tous les nombres réels x, y, z tels que

$$x+y+z = 17, \qquad xy+yz+xz = 94, \qquad xyz = 168.$$

D'après les relations de Viète, x, y, z sont racines de $P(x) = x^3 - 17x^2 + 94x - 168 = 0$. Cherchons des racines "évidentes" de P. Il est naturel de d'abord chercher des racines entières, qui sont forcément des diviseurs de 168 (pour tester si par exemple 2 est racine, on effectue la division euclidienne de P pa $x-2$ et on regarde si le reste est nul). On remarque que $x = 4$ est racine, et sans difficulté on trouve que $x = 6$ et $x = 7$ sont racines du polynôme $P(x)/(x-4)$. Ainsi, les solutions (x, y, z) sont les six permutations possibles de $(4, 6, 7)$.

Remarque 40. Les fonctions $\sigma_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,\sigma_n(z_1,\ldots,z_n)$ sont appelés *fonctions symétriques élémentaires des z_i*. *Symétriques*, parce qu'une permutation des z_i laisse les σ_k invariants. *Élémentaires*, parce qu'on peut montrer que toute expression symétrique en n variables peut s'exprimer polynomialement à l'aide de ces fonctions symétriques élémentaires. Plus précisément, si $P(z_1,\ldots,z_n)$ est un polynôme à n variables (on laisse le lecteur imaginer ce que c'est) tel que pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$ on ait $P(z_1,\ldots,z_n) = P(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)})$, alors il existe un polynôme à n variables R tel que $P(z_1,\ldots,z_n) = R(\sigma_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,\sigma_n($

Exemple 41. En notant $\sigma_1 = x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$, on a :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Bref, lorsqu'on a affaire à des quantités symétriques, il peut être parfois judicieux de faire intervenir les fonctions symétriques élémentaires associées.

Exercice 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer que les sommes des racines complexes de $P, P', \ldots, P^{(n-1)}$ (où $P^{(n-1)}$ désigne le polynôme P dérivé $n-1$ fois) forment une suite arithmétique.

Exercice 3 Trouver tous les réels x, y vérifiant $x^5 + y^5 = 33$ et $x + y = 3$.

3.2 Relations de Newton

Nous allons voir que des sommes symétriques particulières (sommes des puissances k-ièmes) peuvent s'exprimer assez simplement grâce aux fonctions symétriques élémentaires.

Théorème 42 (Relations de Newton)**.** Soit $n \geqslant 1$, et notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Notons $S_k = \sigma_1^k + \cdots + \sigma_n^k$ pour $k \geqslant 0$. Alors, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \sigma_r S_{k-r} + (-1)^k k \sigma_k = 0, \tag{1}$$

avec la convention $\sigma_0 = 1$ et $\sigma_r = 0$ quand $r > n$.

Ainsi, à titre d'illustration, pour $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} S_1 - \sigma_1 &= 0 \\ S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 &= 0 \\ S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 &= 0 \\ &\vdots \\ S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} S_1 + (-1)^n n \sigma_n &= 0 \end{aligned}$$

et pour $r > n$:

$$S_r - \sigma_1 S_{r-1} + \sigma_2 S_{r-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n S_{r-n} = 0.$$

Remarque 43. Si $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines du polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$a_n S_{k+n} + a_{n-1} S_{k+n-1} + a_{n-2} S_{k+n-2} + \cdots + a_0 S_k = 0.$$

En effet, il suffit d'écrire que $z_1^k P(z_1) + \cdots z_n^k P(z_n) = 0$. Les formules de Newton sont donc très facilement établies lorsque $k \geqslant n$.

Par ailleurs, en réécrivant le polynôme P sous la forme $P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$ (attention aux indices !), les relations de Viète donnent $b_j = (-1)^j \sigma_j$, de sorte que les relations de Newton s'écrivent aussi, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\sum_{r=0}^{k-1} b_r S_{k-r} + k b_k = 0.$$

Preuve des relations de Newton, qui peut être sautée en première lecture. Nous avons déjà traité le cas $k \geqslant n$ plus haut et pouvons donc supposer que $k < n$. La preuve qui suit est due à Doron Zeilberger. Considérons $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n, k)$ l'ensemble des couples $(A, j^{(l)})$, où :

(i) A est un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$,

(ii) j appartient à $\{1, 2, \ldots, n\}$,

(iii) $|A| + l = k$, où $|A|$ est le nombre d'éléments de A,

(iv) $l \geqslant 0$, et si $l = 0$ alors $j \in A$.

On définit ensuite le poids $w(A, j^{(l)})$ de $(A, j^{(l)})$ par la formule

$$w(A, j^{(l)}) = (-1)^{|A|} \left(\prod_{a \in A} z_a \right) z_j^l.$$

Par exemple, $w(\{1, 3, 5\}, 2^{(3)}) = (-1)^3 z_1 z_3 z_5 \cdot z_2^3 = -z_1 z_2^3 z_3 z_5$. On voit aisément que la somme des poids de tous les éléments de $\mathcal{A}$ est égale au terme de gauche de (1).

Prouvons maintenant que cette somme est nulle. À cet effet, considérons l'application $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ définie par :

$$T(A, j^{(l)}) = \begin{cases} (A \backslash \{j\}, j^{(l+1)}), & j \in A, \\ (A \cup \{j\}, j^{(l-1)}), & j \notin A. \end{cases}$$

Cette application vérifie $w(T(A, j^{(l)})) = -w(A, j^{(l)})$ et est une involution (i.e. T composé avec elle-même donne l'identité). On peut donc assembler tous les poids par paires de sorte que chaque paire contienne un poids et son opposé. La somme de tous les poids est donc bien nulle, ce qui conclut la preuve.

Mentionnons qu'il est également possible de procéder par récurrence sur $n - k$ pour prouver les relations de Newton. $\square$

Exemple 44. Soient x, y, z des nombres réels tels que $x+y+z = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 3$ et $x^3 + y^3 + z^3 = 7$. Trouvons la valeur de $x^5 + y^5 + z^5$.

À cet effet, notons S_k et σ_k respectivement les sommes des puissances k-ièmes et la k-ième fonction symétrique élémentaire de x, y, z. Les relations de Newton donnent

$$S_1 - \sigma_1 = 0, \qquad S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0, \qquad S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 = 0.$$

On en tire que $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$ et $\sigma_3 = 1$. D'après les relations de Viète, x, y, z sont donc les solutions de $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$. Ainsi, d'après la Remarque 43, nous avons

$$S_{k+3} = S_{k+2} + S_{k+1} + S_k$$

pour $k \geqslant 0$. Il s'ensuit que $S_4 = 1 + 3 + 7 = 11$ puis que $S_5 = 3 + 7 + 11 = 21$.

Exercice 1 Soient x et y deux nombres non nuls tels que $x^2 + xy + y^2 = 0$ (x et y sont des nombres complexes, mais ce n'est pas trop grave). Trouver la valeur de

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2013} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2013}.$$

Exercice 2 Trouver tous les nombres réels x, y, z tels que

$$x + y + z = 3, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3, \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

4 Distinction entre polynôme et fonction polynomiale

Ici, nous expliquons pourquoi il est nécessaire de faire cette distinction en commençant par définir d'une autre manière un polynôme. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou bien $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni des lois d'addition et de multiplication usuelles.

Définition 45. Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite infinie d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang.

Exemple 46. Par exemple, $(0, 1, 2, 3, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ est un polynôme, de même que $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Par contre, $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ n'en est pas un.

Définition 47. Soit $P = (u_n)_n$ et $Q = (v_n)_n$ deux polynômes. On définit le polynôme $P + Q$ par la suite $w_n = u_n + v_n$ (qui est bien nulle à partir d'un certain rang) et le polynôme $P \times Q$ par la suite (z_n), où $z_n = \sum_{i+j=n} u_n v_n$ (vérifier que (z_n) est nulle à partir d'un certain rang). On identifie les éléments de $\mathbb{K}$ avec les polynômes constants via l'application qui à un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ associe le polynôme $(\lambda, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Remarquons que ceci est cohérent avec la notion de multiplication intuitive d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$: si (u_n) est un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le polynôme $\lambda \times (u_n)$ est le polynôme (λu_n).

Nous introduisons maintenant l'indéterminée X.

Définition 48. Notons X le polynôme $(0, 1, 0, 0, \ldots)$.

Proposition 49. Tout polynôme P s'exprime sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_n X^n$. On note indifféremment P ou $P(X)$ pour rappeler qu'on note X l'indéterminée (on pourrait très bien la noter Y !).

Démonstration. Si $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, notons N un entier tel que $i \geqslant N$ implique $a_i = 0$. Alors $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_N x^N$. Ceci est une conséquence immédiate de la définition de X et de la multiplication entre polynômes. □

Voici maintenant le lien entre polynôme et fonction polynomiale associée. Rappelons que, pour l'instant, un polynôme est juste une suite de nombres qui est nulle à partir d'un certain rang et n'est pas vu comme une application.

Proposition 50. Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On note $\widetilde{P}$ l'application définie par $\widetilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{K}$, qu'on appelle application polynomiale associée à P. L'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est injective si $\mathbb{K}$ est infini. Si $\mathbb{K}$ est fini, cette application n'est pas nécessairement injective.

Démonstration. Plaçons nous d'abord dans le cas où $\mathbb{K}$ est infini. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$. Écrivons $P(X) = \sum_i a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_i b_i X^i$. Alors le polynôme $P(x) - Q(x)$, au sens des sections précédentes, a une infinité de racines, donc est nulle. Donc $a_i = b_i$ pour tout i.

Par contre, dans le cas où $\mathbb{K}$ est fini, le raisonnement précédent ne s'applique pas. Exhibons d'ailleurs un contre-exemple. Considérons $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $P(X) = X^p - X$. D'après le petit théorème de Fermat, pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $P(x) = 0$. Ainsi, P n'est pas le polynôme nul, mais les deux fonctions polynomiales associées sont les mêmes. □

En d'autres termes, lorsque $\mathbb{K}$ est infini (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ce qui explique que nous n'avons pas perdu de généralité dans les premières sections), nous pouvons parler sans distinction de polynôme ou de fonction polynomiale associée. En revanche, dans les autres cas, il faut faire très attention !

5 Éléménts de réponse aux exercices

Solution de l'exercice 1 On cherche le reste sous la forme $R(X) = aX + b$. On a $R(1) = P(1)$, $R(-1) = P(-1)$, ce qui permet de calculer $R(X) = -2X + 2$.

Solution de l'exercice 2 Si $Q(x)$ était un polynôme, alors $Q(x)-x$ serait un polynôme avec une infinité de racines, donc serait de degré nul, c'est absurde.

Solution de l'exercice 3 Comme $P(x)^2 = 16P(x^2/4)$ est un polynôme en x^2, on peut appliquer la proposition 23. Dans le premier cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)^2 = Q(x^2)$, on obtient $16Q(x^4) = 16P(x^2) = P(2x)^4 = Q(4x^2)^2$, et donc $16Q(x^2) = Q(4x)^2$. Dans le deuxième cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)^2 = xQ(x^2)$, on obtient similairement que $4Q(x^2) = Q(4x)^2$.

On peut donc réappliquer la proposition 23 à Q, et de même on obtien que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un entier $0 \leqslant i \leqslant 2^k$ et un polynôme R_k tel que $P(x) = x^i R_k(x^{2^k}$.

En choisissant k tel que $2^k > \deg P$, il s'ensuit que R_k est forcément constant et donc que $P(x) = c \cdot x^i$. En réinjectant dans l'équation de départ, on obtient $P(x) = 16(x/4)^i$ pour un certain entier $i \geqslant 0$ (et toutes ces solutions conviennent bien, réciproquement).

Solution de l'exercice 4 1 doit être racine double de P. Cela nous donne deux équations : $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$, qui permettent de trouver $a = 3$ et $b = -4$.

Solution de l'exercice 5 On note n le degré de P. En passant l'équation aux degrés, on obtient $n = (n-1)+(n-2) = 2n-3$, donc $n = 3$. On peut facilement calculer le coefficient dominant, on laisse le soin au lecteur de terminer les calculs.

Solution de l'exercice 6 On remarque que la dérivée de $\frac{P'}{P}$ est $\frac{P''-P'^2}{P^2}$ qui est du même signe que $P'' - P'^2$. Or on voit facilement que $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum \frac{1}{x-\alpha_i}$ donc $(\frac{P'(x)}{P(x)})' = \sum \frac{-1}{(x-\alpha_i)^2} < 0$ d'où le résultat. Pour obtenir l'inégalité sur les coefficients on procède de la manière suivante. Pour $k = 1$, l'inégalité provient de $P(0)P''(0) \leqslant P'(0)^2$. Ensuite on applique l'inégalité aux polynômes $P^{(k-1)}$: $P^{(k-1)}P^{(k+1)} \leqslant \left(P^{(k)}\right)^2$ d'où $a_{k-1}(k-1)! \times a_{k+1}(k+1)! \leqslant a_k^2 \times k!^2$ or $\frac{k!^2}{(k-1)!(k+1)!} = \frac{k}{k+1} \leqslant 1$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice 7 Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les n racines de P. On écrit :

$$\frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = \left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)' = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x-\alpha_i)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(n-1)P'(x)^2 - nP(x)P''(x) &= P(x)^2 \cdot \frac{n(P'(x)^2 - P(x)P''(x)) - P'(x)^2}{P(x)^2} \\ &= P(x)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(x-\alpha_i)^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-\alpha_i)} \right)^2 \right),\end{aligned}$$

qui est positif d'après l'inégalité de Cauchy–Scwharz. Le cas d'égalité s'obtient lorsque tous les α_i sont égaux, i.e. lorsque $P(x)$ est de la forme $P(x) = c(X-a)^n$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On a déja résolu le problème lorsque le degré de P est au plus $n-1$ grâce aux interpolateurs de Lagrange. Si le degré de P est supérieur ou égal à n, notons L le polynôme interpolateur associé aux a_i et b_i. Le polynôme $P-L$ s'annule en $a_1, \ldots, a_n$. On a donc

$$P(X) = c_1 \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j} + c_2(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n).$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Un polynôme à coefficients rationnels est clairement solution. Réciproquement, si P est un polynôme de degré n vérifiant cette propriété, alors en interpolant en $n+1$ points rationnels, on remarque que P est à coefficients rationnels.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

1. Soit $i \geqslant n$. Alors
$$\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (i-k) = \binom{i}{n} \in \mathbb{Z}.$$
On traite similairement le cas $i < 0$.
2. On remarque que $H_n(n) = 1$ et $H_n(i) = 0$ pour des entiers $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons n le degré de P et soit
$$Q(X) = P(X) - \sum_{i=0}^{n} P(i) H_i(X).$$
Le polynôme Q est de degré n et possède $n+1$ racines $0, 1, \ldots, n$. On en déduit que Q est nul. Les polynômes cherches sont donc des combinaisons linéaires entières des polynômes de Hermite.

3. (i) On a

$$\begin{aligned} X^k = (X+1-1)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (X+1)^i (-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j \right) (-1)^{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} \right) X^j. \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, la somme cherchée est nulle pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et vaut 1 pour $j = k$.

(ii) Pour prouver que 1. implique 2., si P est de degré n, on peut écrire

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(i) H_i(X).$$

On a alors pour tout entier $j \geqslant 0$.

$$P(j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{j}{k} P(k)$$

et

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) = \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{k} P(k).$$

D'après ce qui précède, cette somme est nulle pour $i \geqslant n+1$.
Pour montrer que 2. implique 1., on voit que le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} u_i H_i(X)$$

convient en utilisant un raisonnement similaire.

Solution de l'exercice 11 On met P sous forme canonique : $P = a(x-b)^2 + c$. On translate de b selon l'axe des abscisses, de $-c$ selon l'axe des ordonnées, et on applique une homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Solution de l'exercice 12 Soit (x, y, z) une solution. Visiblement, aucun de ces nombres n'est nul. En retranchant la troisième équation à la deuxième équation, on en déduit que $zx = xy$, puis, en simplifiant par x (qui est non nul), on obtient que $z = y$. En retranchant la troisième équation à la première équation, on obtient : $y^2 - xy = 8$, ou encore $xy = y^2 - 8$. La deuxième équation se réécrit $y^2 x + xy = 4$. Il vient donc :

$$y(y^2 - 8) + y^2 - 8 = 4,$$

ou encore $y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$. On remarque que $y = 3$ est une solution. En effectuant la division euclidienne de $y^3 + y^2 - 8y + 12$ par $y - 3$, on trouve :

$$y^3 + y^2 - 8y - 12 = (y - 3)(y^2 + 4y + 4) = (y - 3)(y + 2)^2.$$

On en déduit que $y = z = 3$ ou $y = z = -2$. Dans le premier cas, $x = \frac{1}{3}$ et dans le deuxième cas, $x = 2$. Réciproquement, les triplets $(2, -2, -2)$ et $(\frac{1}{3}, 3, 3)$ sont solution et ce sont donc les seules.

Solution de l'exercice 13 Supposons que $ax^2 - (a + 3)x + 2 = 0$ admette deux racines de signe opposé, notées z_1, z_2. Alors d'après les relations de Viète, $z_1 z_2 = 2/a$. Or z_1 et z_2 sont de signe opposés si, et seulement si, $z_1 z_2 < 0$. On en déduit que $a < 0$. Réciproquement, si a<0, alors le discriminant de l'équation vaut $a^2 - 2a + 9$. Pour montrer qu'il est positif, utilisons la forme canonique en écrivant $a^2 - 2a + 9 = (a - 1)^2 + 8 \geqslant 0$. Ainsi, lorsque $a < 0$, il y a deux solutions réelles notées z_1, z_2. D'après les relations de Viète, $z_1 z_2 = 2/a < 0$, de sorte que z_1 et z_2 sont de signe opposés.

Remarquons que dans la preuve de la réciproque, il a d'abord fallu montrer que le polynôme avait deux racines réelles avant d'utiliser les relations de Viète.

Solution de l'exercice 14 On pose $P = \sum a_k X^k$, et on appelle n le degré de P. La somme des racines de $P^{(k)}$ vaut $\frac{a_{n-1}(n-1)(n-2)...(n-k)}{a_n n(n-1)...(n-k+1)} = \frac{a_{n-1}(n-k)}{a_n n}$. La suite est donc arithmétique, de raison $\frac{-a_{n-1}}{n a_n}$.

Solution de l'exercice 15 Indication : introduire $\sigma_1 = x + y$ et $\sigma_2 = xy$, puis écrire les équations correspondantes pour σ_1 et σ_2, puis les résoudre.

Solution de l'exercice 16 On a clairement $x/(x + y) + y/(x + y) = 1$ et

$$\frac{x}{x + y} \cdot \frac{y}{x + y} = \frac{xy}{x^2 + 2xy + y^2} = 1.$$

Ainsi, $x/(x + y)$ et $y/(x + y)$ sont les racines de $t^2 - t + 1 = 0$, de sorte que les sommes $S_k = (x/(x + y))^k + (y/(x + y))^k$ vérifient $S_0 = 2$, $S_1 = 1$ et

$$S_{k+2} = S_{k+1} - S_k$$

pour $k \geqslant 0$. On en déduit que la suite (S_k) est période de période 6, ses valeurs étant successivement $2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, \ldots$. On en déduit que $S_{2013} = -2$.

Solution de l'exercice 17 On écrit les relations de Newton :

$$S_1 - \sigma_1 = 0, \qquad S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0, \qquad S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 = 0.$$

Ainsi, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$. On en tire que x, y, z sont racines de $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Or $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$. Donc $x = y = z = 1$.